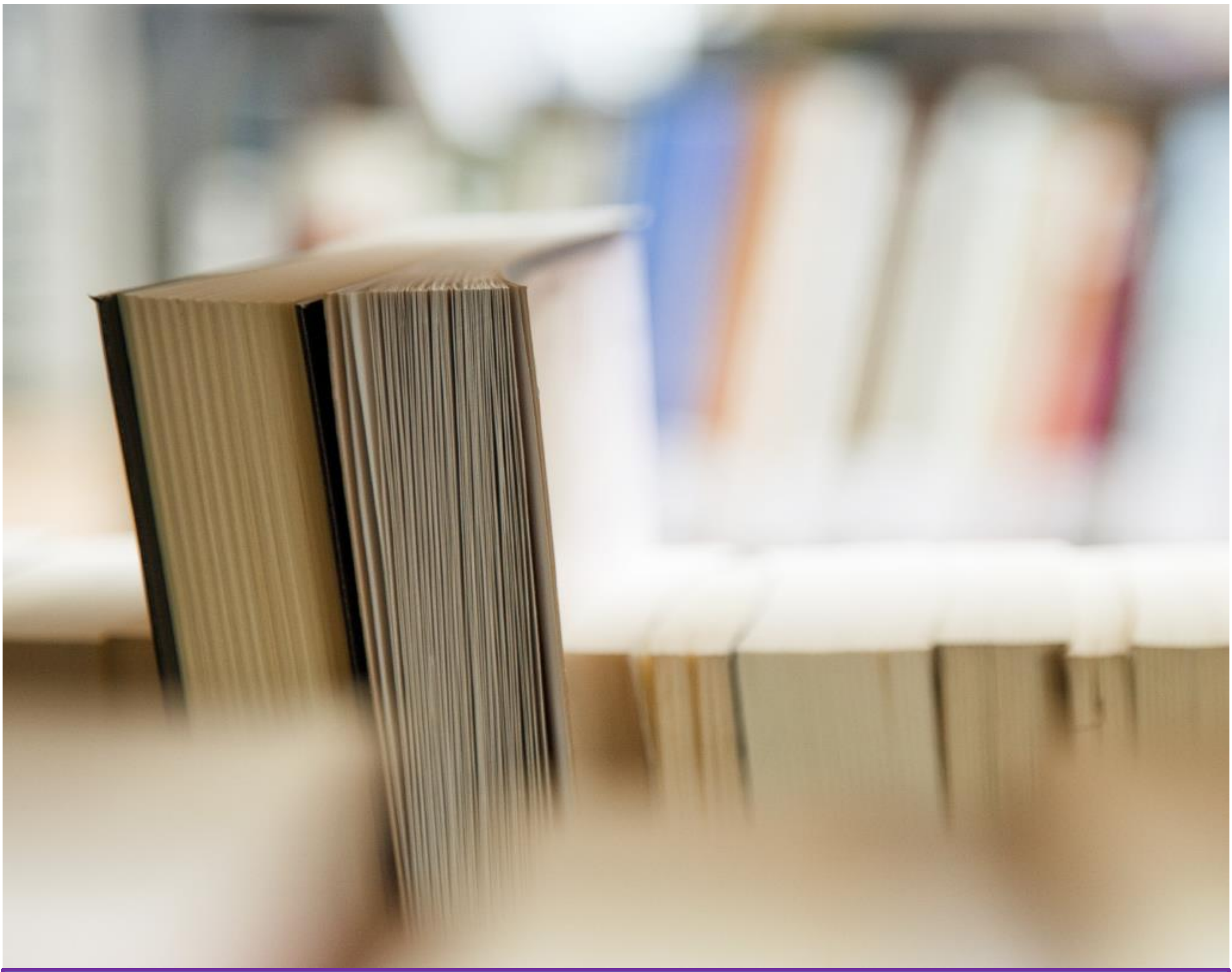


ریاضیات گسسته

فصل اول:

آشنایی با نظریه اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

مروری بر نمایش مجموعه‌های اعداد:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه اعداد طبیعی زوج: $E=\{۲,۴,۶,۸,...\}=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$

مجموعه اعداد طبیعی فرد: $O=\{۱,۳,۵,۷,...\}=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$

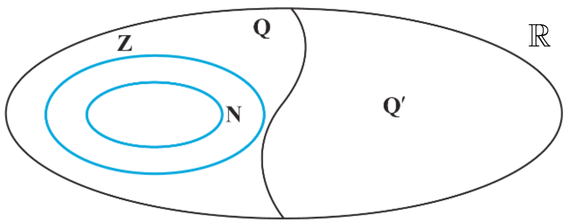
مجموعه اعداد حسابی: $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq ۰\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$



یادآوری: در سال گذشته با گزاره‌ها (مانند p و q و...) و سورها (مانند سور عمومی $\forall$ و سور وجودی $\exists$) آشنا شدیم. همچنین با نقیض یک گزاره که با نماد $\sim p$ نمایش می‌دادیم، آشنا شدیم. آموختیم که برای رد کردن یک گزاره یا سور عمومی کافی است یک **مثال نقض** (مثالی که کلیت آن حکم را رد کند) بیاوریم.

به عنوان مثال، گزاره «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را در نظر بگیرید. با یک مثال نقض نشان می‌دهیم که این گزاره نادرست است:

$$\begin{cases} a=\sqrt{۲} \\ b=-\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow ab=\sqrt{۲}\times(-\sqrt{۲})=-۲$$ که عددی گویاست

همانطور که مشاهده کردید برای نشان دادن نادرستی یک گزاره یافتن یک مثال نقض کافی است، اما برای اثبات درستی یک گزاره نمی‌توان به یک یا چند مثال اکتفا کرد و به روش‌هایی برای استدلال کردن نیاز داریم. در این فصل با چهار روش برای اثبات درستی گزاره‌ها آشنا می‌شویم.

☑ مثال: **جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی .... و تفاضل هر دو عدد فرد، عددی .... است.

ب) مجموع هر دو عدد زوج، عددی .... و تفاضل هر دو عدد زوج، عددی .... است.

پ) حاصلضرب هر دو عدد فرد، عددی .... و حاصلضرب هر دو عدد زوج، عددی .... است.

ت) مجموع، تفاضل و حاصلضرب هر دو عدد گویا، عددی .... است.

ث) مجموع، تفاضل و حاصلضرب هر دو عدد گنگ، عددی .... است.

ج) مجموع، تفاضل و حاصلضرب یک عدد گنگ و یک عدد گویا، عددی .... است.

روش‌های اثبات ریاضی:

۱← اثبات مستقیم: در این روش به طور مستقیم از فرض به حکم می‌رسیم.

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

حل: برای اثبات کافی است سه عدد طبیعی متوالی را با n و n+۱ و n+۲ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)=۳k\ ,\ k\in\mathbb{N}$$

که ثابت می‌کند این گزاره همواره درست است.

☑ **مثال: هریک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.**

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه A، B و C داشته باشیم: $A\cup B=A\cup C$ ، آنگاه $B=C$

ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

۲← اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: در این روش برای اثبات حکم، لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

حل: دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد:

الف) n زوج است، به عبارت دیگر $n=2k$ $(k\in\mathbb{N})$، در این حالت داریم:

$$n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+6+1=2(2k^2-5k+3)+1$$ که حاصل عددی فرد است

ب) n فرد است، به عبارت دیگر $n=2k-1$ $(k\in\mathbb{N})$، در این حالت هم داریم:

$$n^2-5n+7=(2k-1)^2-5(2k-1)+7=4k^2-4k+1-10k+5+7=4k^2-14k+13=2(2k^2-7k+6)+1$$

که باز هم حاصل عددی فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن n^2-5n+7 را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن n^2-5n+7 را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به صورت گزاره $(p\vee q)\Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم‌ارزی $(p\vee q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ شیوه اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$(p\vee q)\Rightarrow r\equiv\sim(p\vee q)\vee r\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee r\equiv(\sim p\vee r)\wedge(\sim q\vee r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$$

نکته: به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه داریم:

$$\boxed{(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n)\Rightarrow r\equiv(p_1\Rightarrow r)\wedge(p_2\Rightarrow r)\wedge\cdots\wedge(p_n\Rightarrow r)}$$

☑ **مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$، آنگاه $a=0$ یا $b=0$.**

☑ **مثال: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 زوج است.**

☑ **مثال: $A=\{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S=\{۱,۲,...,۶\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n\in A$.**

۳← **اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف:** در روش برهان خلف از هم‌ارزی $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$ استفاده می‌کنیم، یعنی به جای اینکه از p به q برسیم، از q~ به p~ می‌رسیم، یعنی فرض می‌کنیم که نقیض حکم درست است (فرض خلف) و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست به یک نتیجه غیر ممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا معلوم می‌شود که فرض خلف (درست بودن نقیض حکم) باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم که m یک عدد گویا و n یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که m+n یک عدد گنگ است. اگر m+n گنگ نباشد (فرض خلف)، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است، پس تفاضل m+n و m باید عددی گویا باشد یعنی $(m+n)-m\in\mathbb{Q}$ و از آنجا $n\in\mathbb{Q}$ می‌شود که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

☑ **مثال: ثابت کنید حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.**

☑ **مثال: اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.**